

Równania różniczkowe zwyczajne (z laboratorium)

Egzamin 21.06.2022 (I termin), 150 min

Proszę każde zadanie rozwiązywać na osobnej kartce, podpisanej własnym imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Wszystkie zadania są jednakowo punktowane.

Na ocenę będzie miało istotny wpływ uzasadnienie wszystkich przedstawianych wyników.

Zadanie 1. Sformułuj twierdzenie Picarda-Lindelöfa o lokalnym istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego i naszkicuj dowód jednoznaczności rozwiązania. Podaj przykład zagadnienia Cauchy'ego, które ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 2. Rozważamy schemat różnicowy dla parametrów $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$y_{n+1} - \alpha y_n + 2y_{n-1} = h(\beta f_n + \gamma f_{n-1})$$

- a) Znajdź wartości parametrów, dla których schemat ma maksymalny rząd.
- b) Zbadaj stabilność i silną stabilność schematu dla wartości parametrów, przy których schemat jest zgodny.

Zadanie 3. Znajdź pochodną $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=1}$ rozwiązania zagadnienia

$$\dot{y} = \cos(t) (\cos(y-1) - 1)^2 + \sin(y-1) + \mu y^2 - 5y + (\mu-1)t + 4, \quad y(1) = 1.$$

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin(t) \\ \dot{y} = -x + \cos(t) \end{cases}$$

i wypisz jawnymi wzorami funkcje $x(t)$ i $y(t)$. Wyznacz rozwiązanie takie, że $x(0) = 1$ i $y(0) = 0$.

Zadanie 5. Zbadaj stabilność w sensie Lapunowa zerowego rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_2 - x_1^5, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - bx_2^3, \end{cases}$$

w zależności od $a \neq 0$ i $b \geq 0$.